Série d'exercices n° 2

1 Comparaison locale des fonctions

Exercice 1

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que $f(x) \underset{a}{\sim} l$
2. L'équivalence ci-dessus reste-t-elle vraie si $l = 0$?

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$, et non-constante au voisinage de a.

1. Montrer que si $f'(a) \neq 0$ alors $(f(x) - f(a)) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$
2. L'équivalence ci-dessus reste-t-elle vraie si $f'(a) = 0$?
3. Montrer que

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exercice 3

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes, au voisinage du point considéré.

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{\sqrt{\sin(x)}}$ en 0^+
2. $f(x) = \cos(\sin(x))$ en 0
3. $f(x) = x^x - 1$ en 0^+
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ en $+\infty$
5. $f(x) = \ln(\cos(x))$ en 0
6. $f(x) = \sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)}$ en $+\infty$

2 Développements limités

Exercice 4

Donner le développement limité des fonctions suivantes au point et à l'ordre indiqués :

1. $x \mapsto \sin(x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 3
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ en 1 à l'ordre 4
3. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0 à l'ordre 4
4. $x \mapsto \ln(1+e^x)$ en 0 à l'ordre 3
5. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ en 0 à l'ordre 3
6. $x \mapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ en 1 à l'ordre 2
7. $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 à l'ordre 2
8. $x \mapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x+1}$ en 0 à l'ordre 3

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$
3. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{5^x-3^x}{4^x-2^x}\right)$
4. $\lim_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$
5. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}\right)$
6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
7. $\lim_{x\to +\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x(x+1)}{x^2+1}\right)$
8. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \quad (a,b>0)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ si $x\neq 0$, et $f(0)=a$.

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 0.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0,f(0))$. Préciser la position de cette tangente par rapport à la courbe de f.

Exercice 7

Soit $f: x\mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{1+x}$, définie au voisinage de 0.
Déterminer la valeur de a pour que $(0,f(0))$ soit un point d'inflexion de la courbe de f.

Exercice 8

Montrer que la courbe de $f: x\mapsto \sqrt{x(x+2)}e^{\frac{1}{x}}$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ et donner son équation.

Exercice 9

Montrer que la fonction $x\mapsto \sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$ admet un extremum en 0.